УДК 519.21

В.В.Чичагов, М.Г.Шеховцова
(Пермский университет)

ДВЕ ЗАДАЧИ ПО СРАВНЕНИЮ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

Вопрос о сравнении оценок максимального правдоподобия (О.М.П) и несмещенных оценок (Н.О.) функции от неизвестных параметров распределения рассматривался в ряде работ [1]-[6].

В настоящей статье сравнение этих оценок производится для неизвестного параметра p отрицательного биномиального распределения и для некоторых функций от неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ многомерного распределения Пуассона. Сравнение О.М.П. и Н.О. производится с помощью квадратической функции потерь [1]. Тогда на основе функции $\delta[f(\theta)]$, равной разности квадратических функций потерь

$$\delta[f(\theta)] = M[\check{f}(\theta) - f(\theta)]^2 - M[\hat{f}(\theta) - f(\theta)]^2, \tag{1}$$

где $\check{f}(\theta)$ – О.М.П. для функции от параметра $f(\theta)$, $\hat{f}(\theta)$ – Н.О. той же функции, решается вопрос о том, какая из оценок лучше.

Пусть случайная величина Y имеет отрицательное биномиальное распределение, тогда вероятность того, что k успехам в независимых повторных испытаниях будет предшествовать y неудач, определяется формулой

$$P(Y=y,k) = \binom{y+k-1}{k-1} p^k q^y, \quad y=0,1,\dots \tag{2}$$

Оценка максимального правдоподобия и несмещенная оценка для неизвестного параметра p распределения (2) имеют, соответственно, следующий вид:

$$\check{p} = \frac{k}{k+y}, \tag{3}$$

$$\hat{p} = \frac{k-1}{y+k-1}. \tag{4}$$

Т е о р е м а I. Для любого $k \geq 2$ существует $p_* = p_*(k)$, такое, что на интервале $(0, p_*)$ н.о. (4) лучше О.М.П. (3), а на интервале $(p_*, 1)$ оценка (3) лучше оценки (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $\delta(p)$, определяемая формулой (I), имеет в интервале (0,I) один корень и слева от этого корня положительна. Вначале убедимся, что существуют некоторые окрестности точек $p=0$ и $p=1$, в которых функция $\delta(p)$ имеет разные знаки. На основании формул (2), (3) и (4) запишем функцию (I)

$$\delta(p) = \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{k}{y+k} - p\right)^2 P(Y=y,k) - \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{k-1}{y+k-1} - p\right)^2 P(Y=y,k) = \tag{5}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{k}{y+k}\right)^2 - 2p\left(\frac{k}{y+k}\right) - \left(\frac{k-1}{y+k-1}\right)^2\right\} P(Y=y,k) + 2p^2.$$

Предполагая, что $k>3$ и p мало, преобразуем каждое слагаемое формулы (5):

$$\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{k-1}{y+k-1}\right)^2 P(Y=y,k) = p\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{k-1}{y+k-1}\right) P(Y=y,k-1) =$$

$$= p(k-1)\sum_{y=0}^{\infty}\left[\frac{1}{y+k-2} - \frac{1}{(y+k-2)(y+k-3)} + \frac{2}{(y+k-1)(y+k-2)(y+k-3)}\right] \times \tag{6}$$

$$\times P(Y=y,k-1) = \frac{k-1}{k-2}p^2\left[1 + O(p)\right].$$

Аналогично получаем

$$2p\sum_{y=0}^{\infty}\frac{k}{y+k} P(Y=y,k) = \frac{2kp^2}{k-1}\left\{1 - O(p)\right\}. \tag{7}$$

$$\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{k}{y+k}\right)^2 P(Y=y,k) = k^2\sum_{y=0}^{\infty}\left[\frac{1}{y+k-1} - \frac{1}{(y+k-1)(y+k-2)} + \frac{2}{(y+k)(y+k-1)(y+k-2)}\right]^2 \times$$

$$\times P(Y=y,k) = k^2\sum_{y=0}^{\infty}\frac{P(Y=y,k)}{(y+k-1)^2} - 2k^2\sum_{y=0}^{\infty}\frac{P(Y=y,k)}{(y+k-1)^2(y+k-2)} + O(p^3) = \tag{8}$$

$$= \frac{k^2p^2}{(k-1)(k-2)}\left[1 + O(p)\right].$$

Используя равенства (6), (7), (8), (5), получим

$$\delta(p) = p^2\left[\frac{k^2}{(k-1)(k-2)} - \frac{2k}{k-1} - \frac{k-1}{k-2} + 2\right] + O(p^3) = \qquad (9)$$

$$= \frac{3p^2}{(k-1)(k-2)} + O(p^3)\,.$$

Из формулы (9) видно, что можно подобрать такую малую окрестность точки $p=0$, что $\delta(p)>0$. Проделанные выкладки справедливы при $k\neq 2$ и $k\neq 3$. Рассматривая случаи $k=2$ и $k=3$, воспользуемся формулой (см. [7])

$$M\left[\frac{k-1}{y+k-1}\right]^2 = \frac{p^k(k-1)^2}{(k-1)^2}\cdot\frac{d^{k-1}}{dq^{k-1}}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{1}{y^2}q^y\,. \qquad (10)$$

Используя формулу (10), нетрудно получить при $k=2$

$$M\left[\frac{k}{y+k-1}\right]^2 = -\frac{p^2}{q}\ln p\,,$$

$$M\left[\frac{k}{y+k}\right]^2 \geqslant M\left[\frac{k^2}{(y+k)(y+k+1)}\right] = \frac{4p^2}{q^3}(q\ln p - 2\ln p - 2q)\,, \qquad (11)$$

$$M\left[\frac{k}{y+k}\right] = \frac{2p}{q^2}(q + p\ln p)\,,$$

$$\delta(p) \geqslant \frac{2p^2}{q^3}\left[\ln p\left(2q + \frac{q^2}{2} - 2pq - 4\right) - 4q - 2q^2 + q^3\right]\,.$$

Аналогично с помощью формулы (10) можно показать, что при $k=3$

$$\delta(p) \geqslant \frac{p^2}{2q^4}\left[q^3 + O(p\ln p)\right]\,. \qquad (12)$$

Из формул (11) и (12) видно, что в рассмотренных частных случаях можно выбрать такую окрестность точки $p=0$, что $\delta(p)>0$.

Представим теперь функцию $\delta(p)$ в другом виде:

$$\delta(p) = \sum_{y=0}^{\infty}\left[\frac{k}{y+k} - p\right]^2 P(Y=y,k) - \sum_{y=0}^{\infty}\left[\frac{k-1}{y+k-1} - p\right]^2 P(Y=y,k) = \qquad (13)$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{k}{y+k}-\frac{k-1}{y+k-1}\right)\left(\frac{k}{y+k}+\frac{k-1}{y+k-1}-2p\right)P(Y=y,k)=$$

$$=q\sum_{y=0}^{\infty}\frac{P(Y=y,k)}{y+k+1}\left\{2q-\frac{y+1}{y+k+1}-\frac{y+1}{y+k}\right\}.$$

Очевидно, при $p>\frac{k}{k+1}\left(q<\frac{1}{k+1}\right)$ существует такая окрестность точки $p=1$, что $\delta(p)<0$.

Для завершения доказательства рассмотрим функции

$$H(q)=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{y+k+1}\left(2q-\frac{y+1}{y+k}-\frac{y+1}{y+k+1}\right)\binom{y+k-1}{k-1}q^{y+k}=\delta(p)\frac{q^{k-1}}{p^k},\quad (14)$$

$$h(q)=\frac{dH(q)}{dq}=\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{k-1}\left[2q\frac{y+k+1}{y+k+1}-\frac{y+1}{y+k+1}-\frac{(y+1)(y+k)}{(y+k+1)^2}\right]q^{y+k-1}=$$

$$=\frac{q^{k-1}}{p^k}\left\{-2p\sum_{y=0}^{\infty}P(Y=y,k)+\sum_{y=0}^{\infty}\left[\frac{2k}{y+k+1}+\frac{y+1}{(y+k+1)^2}\right]P(Y=y,k)\right\}=$$

$$(15)$$

$$=\frac{q^{k-1}}{p^k}\left\{-2p+\sum_{y=0}^{\infty}\frac{2k}{y+k+1}P(Y=y,k)+\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y+1}{(y+k+1)^2}P(Y=y,k)\right\}>$$

$$>\left\{-2p+\sum_{y=0}^{\infty}\frac{2(k-1)}{y+k-1}P(Y=y,k)+\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y+1}{(y+k+1)^2}P(Y=y,k)\right\}\frac{q^{k-1}}{p^k}=$$

$$=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{(y+1)q^{k-1}}{(y+k+1)^2p^k}P(Y=y,k)>0.$$

Последнее соотношение справедливо для любого $p \in (0,1)$. Заметим далее, что функции $H(q)$ и $\delta(p)$ в силу равенства (14) имеют одинаковое число корней в интервале (0,1) и, кроме того, существуют такие окрестности точек $p=0$ и $p=1$, в которых обе функции сохраняют знак и принимают при этом значения противоположных знаков. Из этого замечания и соотношения (15) следует, что функция $H(q)$, а следовательно, и исследуемая функция $\delta(p)$ имеют один корень на интервале (0,1). Теорема доказана.

Далее рассматривается сравнение вышеуказанных оценок для некоторых функций от неизвестных параметров $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ k-мерного распределения Пуассона вида

$$P_{\lambda}(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\prod_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_i t)^{n_i}}{n_i!}e^{-\lambda_i t}, \tag{16}$$

где $t>0$, $\lambda_i>0$ и n_i – неотрицательные целые числа при $i=1,2,\ldots,k$

Сначала докажем две леммы, используемые далее при доказательстве теорем.

Лемма 1. Если $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$ при $i=1,2,\ldots,k$ и $h_i \geqslant 0$ – целые числа, то справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^{h_i}-\prod_{i=1}^{k}a_i^{h_i} \geqslant \prod_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k}a_i^{[h_i]}, \tag{17}$$

где $a_i^{[h_i]}=h_i!\binom{a_i}{h_i}$. Действительно,

$$\prod_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^{h_i}-\prod_{i=1}^{k}a_i^{h_i}=\prod_{i=1}^{k}\Big[\sum_{\ell=1}^{h_i}\binom{h_i}{\ell}a_i^{h_i-\ell}b_i^{\ell}+a_i^{h_i}\Big]-\prod_{i=1}^{k}a_i^{h_i}+\prod_{i=1}^{k}a_i^{[h_i]}-$$
$$-\prod_{i=1}^{k}a_i^{[h_i]} \geqslant \prod_{i=1}^{k}\Big[\sum_{\ell=0}^{h_i}\binom{h_i}{\ell}a_i^{[h_i-\ell]}b_i^{[\ell]}\Big]-\prod_{i=1}^{k}a_i^{[h_i]}=\prod_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k}a_i^{[h_i]}.$$

В последнем преобразовании использована биномиальная теорема Вандермонда.

Лемма 2. Если $a_i \geqslant c_i > 0$, $b_i \geqslant d_i > 0$ и равенства выполняются не при всех i, $i=1,2,\ldots,k$, то верны следующие неравенства:

$$\prod_{i=1}^{k}a_ib_i-\prod_{i=1}^{k}c_id_i>\prod_{i=1}^{k}c_i\Big(\prod_{i=1}^{k}b_i-\prod_{i=1}^{k}d_i\Big)+\prod_{i=1}^{k}d_i\Big(\prod_{i=1}^{k}a_i-\prod_{i=1}^{k}c_i\Big), \tag{18}$$

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^2 - \prod_{i=1}^{k} c_i^2 > 2\prod_{i=1}^{k} c_i \left(\prod_{i=1}^{k} a_i - \prod_{i=1}^{k} c_i\right). \qquad (19)$$

Действительно, $\prod_{i=1}^{k} a_i b_i - \prod_{i=1}^{k} c_i d_i = \prod_{i=1}^{k} a_i\left(\prod_{i=1}^{k} b_i - \prod_{i=1}^{k} d_i\right) +$

$$+\prod_{i=1}^{k} d_i\left(\prod_{i=1}^{k} a_i - \prod_{i=1}^{k} c_i\right) > \prod_{i=1}^{k} c_i\left(\prod_{i=1}^{k} b_i - \prod_{i=1}^{k} d_i\right) + \prod_{i=1}^{k} d_i\left(\prod_{i=1}^{k} a_i - \prod_{i=1}^{k} c_i\right).$$

Проверка формулы (19) производится непосредственно.

Пусть оценивается функция от неизвестных параметров распределения (16):

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_i}, \qquad (20)$$

где h_i – неотрицательные целые числа. Запишем ее так:

$$f(\lambda) = \lambda^h = \prod \lambda_i^{h_i}. \qquad (20)$$

О.М.П. для этой функции определяется формулой

$$\check{\lambda}^h = \prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{h_i}}{t^{h_i}}, \qquad (21)$$

Н.О. имеет вид

$$\hat{\lambda}^h = \prod_{i=1}^{k} \frac{h_i\left(\frac{n_i}{h_i}\right)}{t^{h_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{[h_i]}}{t^{h_i}}. \qquad (22)$$

Теорема 2. Если оценивается функция от неизвестных параметров распределения (16) $\lambda^h = \prod_{i=1} \lambda_i^{h_i}$, где h_i – неотрицательные целые числа и хотя бы при одном значении i $h_i \geq 2$ $i=1,2,\ldots,k$, то при всех $\lambda_i > 0$ Н.О. лучше, чем О.М.П.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $\delta(\lambda^h)$ положительна при всех значениях параметров $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,k$. Составим функцию (1), используя оценки (21) и (22):

$$\delta(\lambda^h) = M\left[\prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{h_i}}{t^{h_i}} - \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_i}\right]^2 - M\left[\prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{[h_i]}}{t^{h_i}} - \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_i}\right]^2 = \qquad (23)$$

$$=\sum_{n_1=0\ldots n_k=0}^{\infty\ldots\infty}\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_i}\right)^2-\left(\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_i]}\right)^2}{\prod_{i=1}^{k} t^{2h_i}}+2\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_i}}{\prod_{i=1}^{k} t^{2h_i}}\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i t)^{h_i}\right\}e^{-t\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}\prod_{i=1}^{k}\frac{(\lambda_i t)^{n_i}}{n_i!}=$$

$$=\frac{e^{-t\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}}{\prod_{i=1}^{k} t^{2h_i}}\left\{\sum_{n_1=0\ldots n_k=0}^{\infty\ldots\infty}\left[\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i^{h_i})^2-\prod_{i=1}^{k}(n_i^{[h_i]})^2}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i t)^{n_i}+2\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_i}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i t)^{n_i+h_i}\right]\right\}.$$

Заметим, что если коэффициенты при всех степенях произведений $\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i t)$ неотрицательны и есть отличные от нуля, то функция (23) положительна. Коэффициенты будут иметь следующие два вида:

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i^{h_i})^2-\prod_{i=1}^{k}(n_i^{[h_i]})^2}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}, \tag{24}$$

если $n_i \le h_i$ хотя бы при одном значении i, где $i=1,2,\ldots,k$, и

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i^{h_i})^2-\prod_{i=1}^{k}(n_i^{[h_i]})^2}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}+2\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{h_i}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)!}, \tag{25}$$

если все $n_i > h_i$, $i=1,2,\ldots,k$. Коэффициенты первого вида неотрицательны ввиду соотношения $n_i^{h_i} \geqslant n_i^{[h_i]}$. Коэффициенты (25) преобразуем, используя леммы I и 2:

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i^{h_i})^2-\prod_{i=1}^{k}(n_i^{[h_i]})^2}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}+2\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{h_i}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)!}>$$

$$>\frac{2\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_i]}\left(\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_i}-\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_i]}\right)}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}+2\frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{h_i}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)!}=$$

$$=2\,\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_i}-\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_i]}+\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{[h_i]}-\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)^{h_i}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_i)!}\geqslant 0.$$

что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)=\sum_{\ell} C_\ell \lambda^{h_\ell}=\sum_{\ell} C_\ell \prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{h_{\ell i}}. \tag{26}$$

Т е о р е м а 3. Если оценивается функция вида (26) от неизвестных параметров распределения (16), где h_{ℓ_i} – неотрицательные целые числа и хотя бы один показатель $h_{\ell_i} \geq 2$, $i = 1, 2, \dots k$, коэффициенты $C_\ell > 0$, то при любых $\lambda_i > 0$ Н.О. лучше О.М.П.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим функцию $\delta[\varphi(\lambda)]$ с учетом формул (21), (22) и (1):

$$\delta[\varphi(\lambda)] = \sum_{\ell,m} C_\ell C_m M\Big[\Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{h_{\ell i}}}{t^{h_{\ell i}}} - \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_{\ell i}}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{h_{mi}}}{t^{h_{mi}}} - \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_{mi}}\Big) - \tag{27}$$

$$-\Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{[h_{\ell i}]}}{t^{h_{\ell i}}} - \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_{\ell i}}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{n_i^{[h_{mi}]}}{t^{h_{mi}}} - \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_{mi}}\Big)\Big] = \sum_{\ell,m} C_\ell C_m \alpha_{\ell m}.$$

Покажем, что выражения $\alpha_{\ell m}$ положительны. При $\ell = m$ на основании теоремы 2 $\alpha_{\ell m} > 0$. Если $\ell \neq m$, то $\alpha_{\ell m}$ можно записать следующим образом:

$$\alpha_{\ell m} = \frac{e^{-t\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}}{\prod_{i=1}^{k} t^{h_{\ell i}+h_{mi}}} \sum_{n_1=0 \dots n_k=0}^{\infty \dots \infty} \Big\{ \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell i}+h_{mi}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell i}]} n_i^{[h_{mi}]}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i t)^{n_i} + \tag{28}$$

$$+ \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell i}]} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell i}}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} \prod (t\lambda_i)^{n_i+h_{mi}} + \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{mi}]} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{mi}}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} \prod_{i=1}^{k} (t\lambda_i)^{n_i+h_{\ell i}} \Big\}.$$

В формуле (28) коэффициенты при степенях $\prod_{i=1}^{k} (t\lambda_i)$ неотрицательны. Действительно, эти коэффициенты могут иметь следующие четыре вида:

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell i}+h_{mi}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell i}]} n_i^{[h_{mi}]}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}, \tag{29}$$

если хотя бы одно $n_i \leq \min\{h_{mi}, h_{\ell i}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$;

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell i}+h_{mi}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell i}]} n_i^{[h_{mi}]}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} + \frac{\prod_{i=1}^{k} (n_i - h_{mi})^{[h_{\ell i}]} - \prod_{i=1}^{k} (n_i - h_{mi})^{h_{\ell i}}}{\prod_{i=1}^{k} (n_i - h_{mi})!}, \tag{30}$$

если все $n_i > h_{mi}$ и хотя бы одно $n_i \leq h_{\ell_i}$, $i = 1, 2, \dots$;

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell i}+h_{mi}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell i}]} n_i^{[h_{mi}]}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} + \frac{\prod_{i=1}^{k} (n_i - h_{\ell i})^{[h_{mi}]} - \prod_{i=1}^{k} (n_i - h_{\ell i})^{h_{mi}}}{\prod_{i=1}^{k} (n_i - h_{e i})!} \tag{31}$$

если все $n_i > h_{\ell_i}$ и хотя бы одно $n_i \leq h_{mi}$, $i = 1, 2, \dots, k$;

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell_i}+h_{m_i}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell_i}]} n_i^{[h_{m_i}]}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} + \frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{[h_{\ell_i}]} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{h_{\ell_i}}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})!} + \tag{32}$$
$$+ \frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{[h_{m_i}]} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{h_{m_i}}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})!},$$

если при любом i, где $i = 1, 2, \ldots, k$, $n_i > \max\{h_{\ell_i}, h_{m_i}\}$. Коэффициенты первого вида неотрицательны, так как $n_i^{h_{\ell_i}} n_i^{h_{m_i}} \geqslant n_i^{[h_{\ell_i}]} n_i^{[h_{m_i}]}$. Если докажем, что коэффициенты четвертого вида положительны, то положительными будут и коэффициенты второго и третьего видов. Преобразуем выражение (32), пользуясь леммами I и 2.

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell_i}+h_{m_i}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell_i}]} n_i^{[h_{m_i}]}}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} + \frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{[h_{\ell_i}]} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{h_{\ell_i}}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})!} +$$
$$+ \frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{[h_{m_i}]} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{h_{m_i}}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})!} >$$
$$> \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell_i}]}\left(\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{m_i}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{m_i}]}\right)}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} + \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{m_i}]}\left(\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell_i}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell_i}]}\right)}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} +$$
$$+ \frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{[h_{\ell_i}]} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{h_{\ell_i}}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})!} + \frac{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{[h_{m_i}]} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{h_{m_i}}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})!} =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{m_i}} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{h_{m_i}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{m_i}]} + \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})^{[h_{m_i}]}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{\ell_i})!} +$$
$$+ \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{h_{\ell_i}} - \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{h_{\ell_i}} - \prod_{i=1}^{k} n_i^{[h_{\ell_i}]} + \prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})^{[h_{\ell_i}]}}{\prod_{i=1}^{k}(n_i-h_{m_i})!} \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Литература

I. Лумельский Я.П., Шеховцова М.Г. К вопросу о сравнении несмещенных оценок и оценок максимального правдоподобия.- Учен. зап. Пермского ун-та I973, № 27I.

2. Zacks S. and M. Even. Minimum Variance Unbiased and Maximum Likelihood Estimators of Reliability Functions for Systems and in Parallel.- Journal of the American Statistical Association, 1966, 61, 1052-1062.

3. S. Zacks and M.Even. The Efficiencies in Small Samples of the Maximum Likelihood and Best Unbiased Estimators of Reliability Functions.- Journal of the American Statistical Association, 1966, 61, 1034-1051.

4. Rutemuller H.C. Estimation of the Probability Zero Failures in Binomial Trails.- Journal of the American Statistical Association, 1967, 62, 317, 272-277.

5. Zacks S., Milton R. Mean Square Errors of the Best Unbiased and Maximum Likelihood Estimators of Tail Probabilities in Normal Distributions.- Journal of American Statistical Association., 1971, 66, 335, 590-593.

6. Лумельский Я.П., Шеховцова М.Г. Характеристика точности оценок надежности при пуассоновском потоке отказов. Деп. № I878 - 74.

7. De Groot. Unbiased Binomial Sequential Estimation.- Ann. Math. Stat., 1959, 30, 80-101.