УДК 519.21

Ю.К.Беляев (Московский университет)
Я.П.Лумельский (Пермский университет)

# МНОГОМЕРНЫЕ ПУАССОНОВСКИЕ БЛУЖДАНИЯ

Многие задачи теории надежности приводят к рассмотрению пуассоновского потока событий [1]. Представляет интерес изучение многомерных пуассоновских блужданий, отвечающих $k$ -мерному потоку событий с параметром $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,k}$ и замкнутому плану первого вхождения $\Pi^G$. Основные результаты для одномерных планов пуассоновских блужданий содержатся в работах [2] - [6].

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы для $k$ -мерных пуассоновских блужданий сформулировать некоторые результаты в теории оценивания, часть которых была ранее неизвестна и в случае $k=1$.

Для многомерного процесса Пуассона $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)]$, когда время $t$ фиксировано, вероятность $P_\lambda[X(t)=n]$, $n = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,k}$ имеет следующий вид:

$$P_\lambda[X(t)=n] = e^{-t\lambda_0} t^{n_0} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!}, \tag{1}$$

где $t > 0$, $n_i$ - неотрицательные целые числа, $n_0 = \sum_1^k n_i$, $\lambda_0 = \sum_1^k \lambda_i$.

В случае общей схемы $k$ -мерных пуассоновских блужданий график траектории процесса Пуассона можно интерпретировать как блуждание из начала координат по пространству $U = N_1 \times N_2 \times N_3 \times \ldots \times N_k \times T$, где $N_i$ - множество всех неотрицательных целых чисел $i = \overline{1,k}$, а $T$ - множество положительных чисел. Граница остановки процесса блужданий $G$ определена на пространстве $U$ и состоит из конечного или счетного числа точек или сегментов, причем предполагается, что концы этих сегментов и отдельные точки границы не имеют предельных точек в $(k+1)$ -мерном евклидовом пространстве. Границе остановки $G$ отвечает план $\Pi^G$, определяющий семейство вероятностных мер $\mathcal{B}_\lambda^G$ (ниже рассматриваются только замкнутые планы первого вхождения)*.

*Основные определения понятий, используемых нами, соответствуют введенным в работе [4].

Вероятность перехода из начала координат в подмножество $A$ ( $A \subset U$ ) достижимых точек $D[n_1(u),\ldots,n_k(u),\tau(u)]$ $(D \in A)$ $P_\lambda[0, D\in A]$ может быть представлена следующим образом:

$$P_\lambda[0, D\in A] = \int\limits_A \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{n_i(u)} \cdot e^{-\lambda_0 t(u)} \mu_{0,D}(du), \qquad (2)$$

где $\mu_{0,D}$ - счетно-аддитивная мера, не зависящая от параметра $\lambda$ . Справедливость представления (2), как и леммы I2.4.I [ 4 ] , следует из работы [ 7 ] .

Для замкнутого плана $\Pi^G$ с границей остановки $G$ без недостижимых точек $\gamma\,(\gamma\in G)$ из представления (2) следует тождество

$$\int\limits_G e^{-\lambda_0 t(u)} \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{n_i(u)} \mu_{0,\gamma}(du) = 1 . \qquad (3)$$

Вычисление меры $\mu_{0,\gamma}$ производится, как и в работе [ 2 ] , суммированием по подмножеству $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$ и интегрированием по подмножеству $T$ .

Граница остановки $G:\ \tau = t$ определяет семейство многомерных распределений Пуассона (I), а мера $\mu_{0,\gamma}$ $\gamma(n_1, n_2, \ldots, n_k, \tau = t)$ вычисляется по формуле

$$\mu_{0,\gamma} = \frac{t^{n_0(\gamma)}}{\prod_{i=1}^{k} n_i(\gamma)!} . \qquad (4)$$

Неограниченный план $k$ -мерных пуассоновских блужданий с границей остановки $G:\ X_1(\tau) = x_1\ (x_1 \geqslant 1)$, $\gamma(x_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \tau)$ приводит к распределению

$$P_\lambda[0,\gamma] = \frac{\lambda_1^{x_1} \tau^{x_1 + \sum_2^k n_i - 1} e^{-\lambda_0 \tau}}{\Gamma(x_1)} \prod_{i=2}^{k} \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!} , \qquad (5)$$

обобщающему обычное гамма-распределение. Ограниченный план с границей остановки $G:\ \{X_1(\tau) = x_1\} \cup \{X_2(\tau) = x_2\} \cup \ldots$ $\ldots \cup \{X_k(\tau) = x_k\} \cup \{\tau = t_0\}$, $x_i \geqslant 1$, $i = \overline{1,k}$ определяет семейство вероятностных мер вида

$$P_\lambda[0,\gamma] = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i^{x_i} \tau^{x_i + \sum_{j=1}^{k}\bar{i}\, n_i - 1} e^{-\lambda_0 \tau}}{\Gamma(x_i)} \prod_{j=1}^{k}\bar{i}\, \dfrac{\lambda_j^{n_j}}{n_j!} & \text{при } X_i(\tau) = x_i , \\ t_0^{\sum_{j=1}^{k} n_j} e^{-\lambda_0 t_0} \prod_{j=1}^{k} \dfrac{\lambda_j^{n_j}}{n_j!} & \text{при } \tau = t_0 , \end{cases} \qquad (6)$$

где $\sum_{\bar{i}}, \Pi_{\bar{i}}$ означает, что сумма и произведение берутся по всем индексам за исключением $i$.

Математическое ожидание времени остановки процесса блужданий $E_\lambda \tau$ для замкнутого пуассоновского плана $\Pi^G$ удовлетворяет соотношению

$$E_\lambda \tau = \frac{E_\lambda X_i}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{7}$$

Формулу (7) получим дифференцированием тождества (3).

Из формулы (7) следует, что для распределения (5) величины $E_\lambda \tau$ и $E_\lambda X_i$ равны

$$E_\lambda \tau = \frac{x_1}{\lambda_1}, \; E_\lambda X_i = \frac{x_i \lambda_i}{\lambda_1}, \quad i = \overline{2,k}. \tag{8}$$

Для плана с границей остановки $G: \tau = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ $(\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0, i = \overline{1,k})$ с помощью формулы (7) найдем

$$E_\lambda \tau = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_1^k \alpha_i \lambda_i}. \tag{9}$$

Область $\Delta\lambda$ в $k$-мерном параметрическом пространстве $(\lambda_i > 0, i = \overline{1,k})$ замкнутости этого косоугольного плана определяется соотношением

$$\Delta_\lambda : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i < 1. \tag{10}$$

При $k = 1$ план с границей (8) вида $\tau = rX + S$ рассмотрен в работе [2]. Из формулы (10) следует, что область замкнутости такого плана $0 < \lambda < \frac{1}{r}$.

Теорема I. Достаточной статистикой для семейства пуассоновских вероятностных мер $\mathcal{B}_\lambda^G$, определенных $k$-мерным замкнутым планом первого вхождения, являются координаты граничной точки.

Несмещенная оценка для вероятности $P_\lambda(0,D)$ (плотности вероятности) перехода из начала координат в достижимую точку, являющуюся функцией достаточной статистики, дается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть задан замкнутый пуассоновский план $\Pi^G$, тогда несмещенная оценка $\xi(\gamma)$ для вероятности $P_\lambda(0,D)$ определяется формулой

$$\xi(\gamma) = \frac{\mu_{0,D} \, \mu_{D,\gamma}}{\mu_{0,\gamma}} \tag{11}$$

при $\forall \gamma\ (\gamma \in G)$.

Доказательство теоремы 2 основывается на применении соотношений (2) и (3). Формулу (II) можно записать в виде

$$\hat{P}_\lambda(0,D) = \frac{P_\lambda(0,D)\cdot P_\lambda(D,\gamma)}{P_\lambda(0,\gamma)} . \qquad (12)$$

План $\Pi^{G'}$, граница остановки $G'(\gamma' \in G')$ которого образована из достижимых точек исходного плана $\Pi^{G}$, назовем вложенным по отношению к плану $\Pi^{G}$. С помощью формул (II) и (I2), используя результаты наблюдений по исходному плану, можно строить несмещенные оценки для распределений вероятности, определенных вложенными планами. Так, построенная на основе распределения (5) несмещенная оценка для плотности вероятности $P_\lambda[0,\gamma'(x_1', n_2', n_3', \ldots, n_k', \tau)$ того же вида при $x_1' \le x_1$, $n_i' < n_i$, $i=\overline{2,k}$, $\tau' < \tau$ задается формулой

$$\hat{P}_\lambda[0,\gamma'] = \frac{\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^{\sum_2^k n_i' + x_1' - 1}\left(1-\frac{\tau'}{\tau}\right)^{\sum_2^k (n_i - n_i') + (x_1 - x_1') - 1}\prod_{j=2}^{k}\binom{n_j}{n_j'}}{\tau B(x_1 - x_1', x_1)} . \qquad (13)$$

При $k=1$ из формулы (I3) следует оценка для плотности гамма-распределения, полученная в работе [8] для случая, когда $x_1/x_1'$ целое положительное число.

На основе распределения (6) можно легко получить с помощью формулы (II) несмещенную оценку для $P_\lambda(0,\gamma')\ \gamma' \in G'$ в случае аналогичного вложенного плана с границей остановки

$$G': \left[\bigcup_{i=1}^{k}\{X_i = x_i'\} \cup \{\tau = t_0'\}\right],\ x_i' \le x_i,\ i=\overline{1,k},\ t_0' < t_0 .$$

Несмещенная оценка для вероятности $P_\lambda[0,\gamma'(n_1', \ldots, n_k', t')]$ в случае вложенного плана $\Pi^{G'}(\gamma' \in G')$ при $\tau = t_1$, полученная на основе распределения (I) ($t_1 < t$, $n_i' \le n_i$, $i=\overline{1,k}$), имеет вид

$$\hat{P}_\lambda[0,\gamma] = \left(\frac{t_1}{t}\right)^{n_0'}\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^{n_0 - n_0'}\prod_{i=1}^{k}\binom{n_i}{n_i'} , \qquad (14)$$

где $n_0' = \sum_{i=1}^{k} n_i'$, $n_0 = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

На основе распределения (I) можно построить несмещенные оценки для более широкого класса функций, чем вероятности перехода в достижимые точки.

Т е о р е м а 3. Единственная несмещенная оценка для аналитической функции $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ в окрестности $0 = (0, \ldots, 0)$, выраженная через достаточную статистику

$(X_1(t)=n_1, X_2(t)=n_2, \dots, X_k(t)=n_k)$ семейства распределений (I), определяется формулой

$$\hat{g} = \sum_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_k=0}^{n_1,n_2,\dots,n_k} g(0)^{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_k)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\binom{n_i}{\ell_i}}{t^{\ell_i}}, \tag{I5}$$

где $g(0)^{(\ell_1,\dots\ell_k)}$ – смешанные частные производные от функции $g(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k)$, причем по $\lambda_1$ дифференцировали $\ell_1$ раз, по $\lambda_2$ - $\ell_2$ раз, ... , по $\lambda_k$ - $\ell_k$ раз в точке $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Формулу (I5) получим, если в уравнении

$$E_\lambda \hat{g} = g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

функцию $g(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ разложим в ряд Маклорена и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$. Единственность оценки следует из полноты экспоненциального семейства, у которого размерность параметрического пространства и достаточной статистики одинаковы, а параметрическое пространство содержит $k$ -мерный параллелепипед [IO].

Следствие I. Единственная несмещенная оценка для $\prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{h_i} \equiv \lambda^h$ ($h_i$ - неотрицательные целые числа $i=\overline{1,k}$) семейства распределений (I) имеет вид

$$\hat{\lambda}^h = \prod \frac{h_i!\binom{n_i}{h_i}}{t^{h_i}}. \tag{I6}$$

Следствие 2. Единственная несмещенная оценка для дисперсии $V_{\hat{\lambda}^h}$ оценки (I6) равна

$$\hat{V}_{\hat{\lambda}_k^h} = \frac{\left[\prod_{i=1}^{k} h_i!\binom{n_i}{h_i}\right]^2 - \prod_{i=1}^{k}(2h_i)!\binom{n_i}{2h_i}}{h_0}, \tag{I7}$$

где $h_0 = \sum_{i=1}^{k} h_i$.

Пусть точка $D$ является достижимой при планах $\Pi^G$ и $\Pi^{G'}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть получены несмещенные оценки $\xi(\gamma)$ и $\xi(\gamma')$ $\gamma\in G$, $\gamma'\in G$ для $P_\lambda(0,D)$ на основе полных планов исходного $\Pi^G$ и вложенного $\Pi^{G'}$. Тогда дисперсии этих оценок при всех допустимых значениях параметров связаны соотношением

$$V_\lambda \xi(\gamma) \le V_\lambda \xi(\gamma'). \tag{I8}$$

Пусть существует несмещенная оценка $g$ для векторной функции

$g=(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ , где $g_j = g_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ $j=\overline{1,k}$ на основе замкнутого пуассоновского плана $\Pi^G$ . Тогда при обычных предположениях (см. работы [2], [II]) можно получить многомерное неравенство Вольфовица для матрицы ковариаций $E_\lambda(g-\hat{g})(g-\hat{g})'$.

## Литература


I. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М., Наука, I965.

2. Trybula S. Sequentail Estimation in Processes with Independent Increments.- Dissertationes Mathematicae, Rozprawy Matematyczne, LX, Warszawa, 1968.

3. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., Наука, I972.

4. Зайдман Р.А., Линник Ю.В., Судаков В.Н. О последовательном оценивании и марковских моментах остановки для процессов с независимыми приращениями. - В сб. Советско-Японский симпозиум по теории вероятности. Новосибирск, I969.

5. Knight W. A Method of Sequential Estimation Applicable to the Hypergeometric, Binomial, Poisson and Exponential Distribution.- Ann. Math. Stat., 36, 5, 1965.

6. Dvoretzky A., Kieter J., Wolfowitz J. Sequential Decision Problems for Processes with Continuous Time Parameter.- Testing Hypotheses.-Ann. Math. Stat., 24,2, 1953.

7. Судаков В.Н. О мерах, определяемых марковскими моментами остановки. - В кн. Исследования по теории случайных процессов. Л., Наука, I969.

8. Patil G.P., Wani J.K. Minimum Variance Unbiased Estimation of the Distribution Function Admitting a Sufficient Statistics.- Ann. Inst. Stat. Math., 18, 1, 1966.

9. Лумельский Я.П. Несмещенные достаточные оценки в случае распределения Пуассона. - Учен. зап. Пермского ун-та, сер. матем. наук, I969, № 2I8.

I0. Линник Ю.В. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., Наука, I966.

II. Wolfowitz J. The Efficiency of Sequential Estimates and Wald's Equation for Sequential Processes.- Ann. Math. Stat., 18, 2, 1947.