УДК 519.24

Ю.Н.Благовещенский
(Московский университет)

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим последовательность систем уравнений

$$V_n(z,\omega)=0 \qquad (1)$$

относительно z ($z^T=(z_1,\dots,z_s)\in R^s$), где вектор $v_n^T(z,\omega)=$ $=v_n^{(1)}(z,\omega),\dots,v_n^{(s)}(z,\omega)$) определен на вероятностном пространстве (Ω,G,P) и принимает значения в R^s, а $z\in U_{\varepsilon_0}(z_0)=\{z:|z-z_0|<\varepsilon_0\}$.

Нами приняты векторные обозначения: если $x^T=(x_1,\dots,x_s)$, то x – s-мерный вектор-столбец, если $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{s}$ – матрица, то x^TAx – квадратичная форма; $\frac{\partial x(u)}{\partial u}$, где $x^T(u)=$ $=(x_1(u_1,\dots,u_p),\dots,x_s(u_1,\dots,u_p))$, – матрица $p\times s$ с элементами $\frac{\partial x_j}{\partial u_i}$, $j=1,\dots,s$, $i=1,\dots,p$; $|x|^2=x^Tx$;

$$\inf(A)=\inf_{v\in R^s}\frac{|v^TAv|}{v^Tv}, \qquad |A|=\sup_{v\in R^s}\frac{|v^TAv|}{v^Tv}$$

для квадратичной $s\times s$ матрицы A; $x^2=xx^T$ – матрица. Остальные обозначения общепринятые.

Такие системы уравнений возникают и при различных вариантах метода максимального правдоподобия, и при методе моментов, и при оценивании с помощью квантилей, и во многих других случаях.

На $v_n(z,\omega)$ наложим следующие условия:

$У_1$. Существуют $v_n'(z,\omega)=\frac{\partial v_n(z,\omega)}{\partial z}$ и для $z\in U_\varepsilon(z_0)$ удовлетворяют почти наверное неравенству

$$|v_n'(z,\omega)-v_n'(z_0,\omega)|\le\rho(|z-z_0|)H_n(\omega), \qquad (2)$$

где $\rho(\Delta)\searrow 0$ при $\Delta\searrow 0$ и равномерно по n: $\lim\limits_{K\to\infty}P\{H_n(\omega)>K\}=0$.

$У_2$. Величины $v_n(z_0,\omega)$ и $v_n'(z_0,\omega)$ сходятся по вероятности к $v(z_0,\omega)$ и $v'(z_0,\omega)$ соответственно, причем (i) $v(z_0,\omega)=0$ п.н.P,

(ii) $\inf(v'(z_0,\omega))=\delta(\omega)>0$ п.н.P.

Т е о р е м а 1. В условиях $У_1$, $У_2$ существует $z_n(\omega)$ такое, что для любых $\beta<1$ и $\delta>0$ найдется $N<\infty$, что при $n\geq N$

$$P\{v_n(z_n(\omega),\omega)=0,\ |z_n(\omega)-z_0|<\delta\}\geq\beta. \qquad (3)$$

Для формулировки следующей теоремы введем обозначение

$$z_n^{(0)}(\omega) = z_0 - [v_n'(z_0,\omega)]^{-1} v_n(z_0,\omega). \qquad (4)$$

Т е о р е м а 2. Если существует последовательность положительных матриц b_n и невырожденная вероятностная мера $Q(dx)$ в R^s такие, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{b_n^{-1}(z_n^{(0)}(\omega) - z_0) \in \Gamma\} = \int_\Gamma Q(dx), \qquad (5)$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\{b_n^{-1}(z_n(\omega) - z_0) \in \Gamma\} = \int_\Gamma Q(dx). \qquad (6)$$

И, наоборот, из равенства (6) в тех же условиях следует равенство (5).

Заметим, что эквивалентность условий (5) и (6) не нуждается в дополнительных к $У_1$ и $У_2$ условиях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$w_n(z, z_0, \omega) = \frac{v_n(z,\omega) - v_n(z_0,\omega)}{z - z_0} - v_n'(z_0,\omega). \qquad (7)$$

Поскольку

$$w_n(z, z_0, \omega) = v_n(z_n^*(\omega),\omega) - v_n'(z_0,\omega), \qquad (8)$$

где $z_n^*(\omega)$ - точка отрезка прямой между z и z_0, то $|z_n^*(\omega) - z_0| \le |z - z_0|$ и по условию $У_1$

$$|w_n(z, z_0, \omega)| \le \rho(|z - z_0|) H_n(\omega). \qquad (9)$$

Преобразуя уравнение (7), получим

$$v_n(z,\omega) = v_n(z_0,\omega) + [v_n'(z_0,\omega) + w(z, z_0, \omega)](z - z_0). \qquad (10)$$

Поскольку $\inf(v'(z_0,\omega)) = \delta(\omega) > 0$ с вероятностью I, а $v_n'(z_0,\omega) \xrightarrow{P} v_n'(z_0,\omega)$ при $n\to\infty$, то для любого $\beta_1 < 1$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $N_1 < \infty$ такие, что

$$P\{\inf(v_n'(z_0,\omega)) > \delta_1\} \ge \beta_1 \qquad (11)$$

при $n \geqslant N_1$. Множество таких ω обозначим через A_{β_1}. Выбрав $B_K = \{\omega : H_n(\omega) < K\}$ так, что $P(B_K) > \beta_1$ и ε_1 такое, что $\rho(\varepsilon_1) \leq \frac{\delta_1}{2K}$, получим

$$\inf\left(v_n'(z_0,\omega) + w_n(z_0,z,\omega)\right) > \frac{\delta_1}{2} \qquad (12)$$

при всех $z \in U_{\varepsilon_1}(z_0)$ и $\omega \in B_K \cap A_{\beta_1}$.

Заметим теперь, что $w_n(z,z_0,\omega)$ непрерывна по z в точке z_0 для почти всех ω в силу неравенства (9). При любом $z \neq z_0$, как это следует из уравнения (7) и непрерывности $v_n(z,\omega)$, $w_n(z,z_0,\omega)$ также непрерывна. С другой стороны, $w_n(z,z_0,\omega)$ равномерно (по вероятности) ограничена. Таким образом, при $z \in U_{\varepsilon_1}(z_0)$ доказана равномерная непрерывность $w_n(z,z_0,\omega)$ по z (по вероятности).

Из предыдущего следует, что система уравнений

$$V_n(z,\omega) = 0$$

эквивалентна системе

$$z - z_0 + R_n(z,z_0,\omega)\, v_n(z_0,\omega) = 0, \qquad (13)$$

где $$R_n(z,z_0,\omega) = \left[v_n'(z_0,\omega) + w_n(z,z_0,\omega)\right]^{-1}$$

является равномерно непрерывным и ограниченным оператором для всех $z \in U_{\varepsilon_1}(z_0)$, $n \geqslant N_1$ и всех $\omega \in C_\beta$ с любым наперед заданным $\beta < 1$.

Но $v_n(z_0,\omega) \xrightarrow{P} v(z_0,\omega)$ при $n \to \infty$. Поэтому (может быть увеличивая N_1 и сужая C_{β_1}) можно считать, что $|v_n(z_0,\omega)| \leq \frac{\delta_1\varepsilon_1}{4}$. Непрерывность отображения $z_0 - R_n(z,z_0,\omega)v_n(z_0,\omega)$ области $U_{\varepsilon_1}(z_0)$ строго в себя следует из неравенства

$$|R_n(z,z_0,\omega)\, v_n(z_0,\omega)| < \frac{\varepsilon_1}{2}. \qquad (14)$$

Таким образом, существует, по крайней мере, одна неподвижная точка $z_n(\omega)$ для системы (13), т.е.

$$z_n(\omega) = z_0 - R_n(z_n(\omega), z_0, \omega)\, v_n(z_0,\omega), \qquad (15)$$

что и завершает практически доказательство теоремы I. Действительно, пусть $\beta < 1$ и $\delta > 0$ заданы. Для $\beta_1 = 1 - \frac{1-\beta}{3}$ имеются δ_1 и N_1

такие, что выполнено условие (5) и подобрано $K < \infty$ такое, что $P(B_K) \geq \beta_1$. Теперь выберем ε_1 из условия $\rho(\varepsilon_1) < \frac{\delta_1}{2K}$ и подберем N_2 так, чтобы при $n \geq N_2$ выполнялось неравенство

$$P\{|v_n(z_0,\omega)| < \frac{\delta_1}{2} min(\frac{\varepsilon_1}{2}, \delta)\} \geq \beta_1 . \qquad (16)$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Если событие, стоящее под знаком вероятности в неравенстве (16), обозначить через C_δ, то при $\omega \in \Omega^{(n)}_{\beta,\delta} = A_\beta \cap B_K \cap C_\delta$ имеет место равенство (15) для всех $n \geq N$, при этом

$$P(\Omega^{(n)}_{\beta,\delta}) \geq 1 - 3(1-\beta_1) = \beta$$

и

$$|z_n(\omega) - z_0| \leq \frac{2}{\delta_1} \cdot \frac{\delta_1}{2} min(\frac{\varepsilon_1}{2}, \delta) \leq \delta ,$$

что и требовалось доказать.

Теперь вместо системы (13) напишем более удобное для нас уравнение для $z_n(\omega)$:

$$z_n(\omega) = z_0 - [v_n'(z_0,\omega)]^{-1} v_n(z_0,\omega) - \\ - [v_n'(z_0,\omega)]^{-1} w_n(z_n(\omega), z_0, \omega)(z_n(\omega) - z_0) \qquad (17)$$

и пусть $z_n^{(0)}(\omega) = z_0 - [v_n'(z_0,\omega)]^{-1} v_n(z_0,\omega)$. (см. (4)).

Поскольку $|z_n^{(0)}(\omega) - z_n(\omega)| \leq K |z_0 - z_n(\omega)| \rho(|z_0 - z_n(\omega)|$ для $\omega \in \Omega^{(n)}_{\beta,\delta}$ при $n \geq N$, то, переписывая уравнение (17), получим

$$[v_n'(z_0,\omega)]^{-1}(v_n(z_0,\omega) + w_n(z_n(\omega), z_0, \omega)(z_n(\omega) - z_0)) = \\ = z_0 - z_n(\omega) \qquad (18)$$

таково, что главный член асимптотики есть $z_n^{(0)}(\omega)$, т.е. должна иметь место теорема 2.

Доказательство теоремы 2. Конечно, равенство (5) имеет место и для последовательности $P_r(\cdot)$:

$$P_r(A) = P(\Omega^{(N_2)}_{\beta_r,\delta_r} \cap A), \ A \in G , \qquad (19)$$

где $\beta_r \to 1$ при $r \to \infty$ и $\delta_r \to 0$, а предел в равенстве (5) рассматривается для $n \geqslant N_2 \to \infty$. Очевидно и обратное: если (5) имеет место для $P_r(\cdot)$ и $n \geqslant N_r \to \infty$, то равенство (5) имеет место и для $P(\cdot)$. Это следует из неравенства

$$0 \leq P(A) - P_r(A) = P(A \cap \bar{\Omega}^{(N_2)}_{\beta_r,\delta_r}) \leq$$
$$\leq P(\Omega^{(N_2)}_{\beta_r,\delta_r}) \leq 1 - \beta_r \to 0 \qquad \text{при } n \geqslant N_r \to \infty .$$

Итак, будем считать, что мы исследуем $z_n(\omega)$ в (Ω, G, P_r), $r=1,2,\ldots$, опуская индекс r всюду, где это не вызывает недоразумений.

Для любых трех S-мерных векторов z_0, z_1, z_2 ($z_1 \neq z_0$) имеет место тождество

$$z_2 - z_0 = \left[I_S + \frac{(z_2 - z_1)(z_1 - z_0)^T}{|z_1 - z_0|^2} \right](z_1 - z_0) . \qquad (20)$$

Вводя обозначения

$$G_n(\omega) = b_n^{-1}\left[I_S + \frac{(z_n^{(0)}(\omega) - z_n(\omega))(z_n(\omega) - z_0)^T}{|z_n(\omega) - z_0|^2} \right]^{-1} b_n \qquad (21)$$

и используя тождество (20) для z_0, $z_n(\omega)$, $z_n^{(0)}(\omega)$, придем к равенству

$$b_n^{-1}(z_n(\omega) - z_0) - b_n^{-1}(z_n^{(0)}(\omega) - z_0) = [G_n^{-1}(\omega) - I_S] b_n^{-1}(z_n^{(0)}(\omega) - z_0). \qquad (22)$$

Известно, что для любых квадратных матриц A и B, когда B^{-1} существует, имеет место неравенство

$$|B^{-1}AB| \leq |A| .$$

Следовательно,

$$|G_n'(\omega) - I_S| \leq \frac{|z_n^{(0)}(\omega) - z_n(\omega)|}{|z_n(\omega) - z_0|} \leq K_\rho(|z_0 - z_n(\omega)|) \to 0$$

по вероятности.

Теперь заметим, что из равенства (22) (поскольку правая часть сходится по вероятности к нулю) при условии (5) следует равенство (6). Точно так же из равенства (22) при условии (6) следует равенство (5). Этим доказательство теоремы 2 завершено.