УДК 519.2

В.А. Зорин

(Горьковский университет)

ОБ ОДНОМ ПОДКЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ А.Я.ХИНЧИНА

В работе изучается подкласс распределений А.Я.Хинчина (I), который определен ниже. Из известных работ наиболее близки к нашей [2, 3, 4, 5].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ – независимые случайные величины и $p\{\xi_n < x\} = 1 - exp(-\lambda x)$, $x > 0$. Будем говорить, что случайный вектор $X(\eta, \tau(\vartheta))$ обладает свойством (A), если выполняются следующие условия:

(а) $\eta, \tau(\vartheta)$ – случайные величины, кроме того, независимые от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$, причем $p\{\eta \geqslant 0\} = 1$;

(б) $p\{\tau(\vartheta) \geqslant 0\} = 1, (\vartheta > 0)$, (в) $p\{e^{\vartheta}\eta_1 < x\} = p\{\eta + \sum_{k=1}^{\tau(\vartheta)} \xi_k < x\}$, $\eta_1 \overset{d}{=} \eta$

(по определению полагаем $\sum_{k=1}^{0} \xi_k = 0$).

Заметим, что $K(t) \equiv \eta + \sum_{1}^{\tau(t)} \xi_k$ часто встречается в теории массового обслуживания, если $K(t)$ интерпретировать как функцию загрузки (7) одноканальной системы, когда входной поток заявок, характеризуется величиной $\tau(\vartheta)$, равной числу заявок, поступающих в систему за интервал времени $[0, \vartheta]$, ξ_k – длительность обслуживания заявки с номером k, η – загрузка системы в начальный момент времени, либо "время разогрева" системы.

Т е о р е м а. Случайный вектор $X = (\eta, \tau(\vartheta))$ обладает свойством (A) тогда и только тогда, когда

$$E(e^{-u\eta}) = B \cdot exp\{\alpha \ln \frac{\lambda}{u+\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \left(\frac{\lambda}{u+\lambda} \right)^n \}, \quad (I)$$

$$E(z^{\tau(\vartheta)}) = exp\{-\alpha \ln [z + e^{\vartheta}(1-z)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} [\left(\frac{z}{e^{\vartheta}(1-z)+z} \right)^n - z^n] , \quad (2)$$

где $B > 0$, $\vartheta > 0$, $|z| < 1$, $0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq \alpha$, $b_n \to 0$, $(n \to \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (в) в терминах преобразований Лапласа-Стильтьеса принимает в силу условий (а) и (б) вид

$$\varphi(e^{v}u) = \varphi(u)\sum_{n=0}^{\infty} p\{\tau(v)=n\} \left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n} , \tag{3}$$

где

$$\varphi(u) = E[exp(-u\eta)]. \tag{4}$$

I) Пусть $\varphi(u)$ имеет тот же вид, что и функция (I). Тогда

$$\frac{\varphi(e^{v}u)}{\varphi(u)} = -\alpha v - \alpha \ln\left\{1+(1-e^{-v})\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n}\left[\left(1-(1-e^{-v})\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{-n}-\right.$$

$$\left.-1\right] = -\alpha v + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-v})^{n}}{n}\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\binom{-n}{k}(1-e^{-v})^{k}\times \tag{5}$$

$$\times\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{k} = -\alpha v + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-v})^{n}}{n}\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n} + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n+m=k}(-1)^{m}\binom{-n}{m}(1-e^{-v})^{m}\times$$

$$\times\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{m}\frac{b_n}{n} = -\alpha v + (1-e^{-v})\frac{\alpha\lambda}{u+\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{k}\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{k} ,$$

$$c_n = \frac{\alpha}{n}(1-e^{-v})^{n} + \sum_{m+k=n}(-1)^{k}\binom{-n}{k}(1-e^{-v})^{k}\frac{b_m}{m} , \ (n \geqslant 2) . \tag{6}$$

Ясно, что $c_n > 0$ при $v>0$, $n=2,3,\ldots$ Из (5) следует

$$\varphi(e^{v}u)/\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(v)\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n}, \quad p_n(v)>0,$$

$(v>0,\ n=0,1,2,\ldots)$, так как при $z=\dfrac{\lambda}{u+\lambda}$

$exp(-g+\sum_{1}^{\infty} g_n z^{n}) = e^{-g}\sum_{0}^{\infty} f_n z^{n},\ f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k g_k f_{n-k}\ \ f_0 = 1$ (см., например, (6)).

Значит $p_n(v) = f_n exp(-\alpha v) > 0$, поскольку $f_n > 0$. Из $p_n(v)>0$ и $\sum_{0}^{\infty} p_n(v) = \sum_{0}^{\infty} p_n(v)\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^{n}\Big|_{u=0} = \frac{\varphi(0)}{\varphi(0)} = 1$

следует, что все $p_n(v)\in(0,1)$, $(v>0, n=0,1,2\ldots)$. Очевидно, $\{p_n(v)\}$ определяет целочисленную величину $\tau(v)$, для которой $p\{\tau(v)=n\}=p_n(v)$, причем $X=(\eta,\tau(v))$ удовлетворяет свойству (A) и $\varphi(u)=E[exp(-u\eta)]$.

2) Пусть теперь $X=(\eta,\tau(v))$ обладает свойством (A). Тогда выполняется свойство (3), (4). Из $P\{\eta \geqslant 0\}=1$ следует аналитичность функции $\varphi(u)$ по переменной u в области $Re\,u>0$.

Пусть $T(v,z)=E[z^{\tau(v)}]=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(v) z^n$. Тогда из равенства (3) следует

$$\varphi(e^v u)=\varphi(u)\,T\left(v,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right), \quad (v>0,\ u>0). \tag{7}$$

Из равенства (7) следует, что $T(v,z)$ аналитическая по v при $Re\,(ue^{-v})>0$

$$\varphi(e^{v+w}u)=\varphi(e^w u)T\left(v,\frac{\lambda}{\lambda+e^w u}\right)=\varphi(u)T\left(w,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)T\left(v,\frac{\lambda}{\lambda+e^w u}\right)=\varphi(u)T\left(v+w,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right).$$

Таким образом, при $v,w>0$ выполняется равенство

$$T\left(v+w,\frac{\lambda}{\lambda+u}\right)=T\left(w,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)T\left(v,\frac{\lambda}{\lambda+e^w u}\right), \quad (u>0), \tag{8}$$

а также существует функция $g(z)$, аналитическая по z, $|z|<1$, и такая, что

$$T(v,z)=1+vg(z)+o(v), \quad (v\to 0). \tag{9}$$

Поэтому из равенств (8) и (9) следует

$$T\left(v+w,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)-T\left(v,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)=\left[T\left(w,\frac{\lambda}{\lambda+e^v u}\right)-1\right]T\left(v,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)=$$
$$=wg\left(\frac{\lambda}{\lambda+e^v u}\right)T\left(v,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)+o(w), \quad (w\to 0).$$

Значит, при $v>0,\ u>0$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial v}T\left(v,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)=g\left(\frac{\lambda}{\lambda+e^v u}\right)T\left(v,\frac{\lambda}{u+\lambda}\right). \tag{10}$$

Из равенств (7) и (10) имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varphi(e^v u)}{\varphi(u)}\right)=g\left(\frac{\lambda}{\lambda+e^v u}\right)\frac{\varphi(e^v u)}{\varphi(u)}, \quad (\varphi(u)\neq 0), \tag{11}$$

т.е.

$$x\varphi'(x)=\varphi(x)g\left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right), \quad (x=ue^v).$$

Из равенства (9) следует, что $g(z)=\lim\limits_{v\to 0}\frac{1}{v}[T(v,z)-1]=\lim\limits_{v\to 0}\frac{1}{v}\sum\limits_{1}^{\infty}p_n(v)\times$ $\times(z^n-1)=\sum\limits_{1}^{\infty}p_n(z^n-1)$, где $0\le p_n=\lim\limits_{v\to 0}\frac{1}{v}p_n(v)$ существуют.

Далее, при $\alpha=\sum\limits_{1}^{\infty}p_n$

$$\frac{1}{u}g\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)=\frac{1}{u}\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n-1\right]=-\sum_{n=1}^{\infty}p_n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{(u+\lambda)^{k+1}}= \tag{12}$$

$$=\frac{p_1}{u+\lambda}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{p_n}{u+\lambda}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_n\lambda^k}{(u+\lambda)^{k+1}}\right]=\frac{\alpha}{u+\lambda}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_n\lambda^k}{(u+\lambda)^{k+1}}.$$

Поэтому из равенств (11) и (12) следует

$$\varphi(u)=exp\left\{-\alpha\int_0^u\frac{dt}{t+\lambda}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}p_n\lambda^k\int_0^u\frac{dt}{(t+\lambda)^{k+1}}\right\}= \tag{13}$$

$$=exp\left\{\alpha\ln\frac{\lambda}{u+\lambda}-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_k}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n\right\},$$

где $b_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}p_{k+1}$.

Далее, из равенств (7) и (13), после замены $z=\lambda/(u+\lambda)$ определяется, как это было сделано при доказательстве достаточности равенств (1) и (2), функция $T(v,z)$, имеющая вид функции (2):

$$T(v,z)=\frac{\varphi(e^v u)}{\varphi(u)}=exp\left\{\alpha\ln\frac{u+\lambda}{ue^v+\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left[\left(\frac{\lambda}{e^v u+\lambda}\right)^n-\left(\frac{\lambda}{u+\lambda}\right)^n\right]\right\}=$$

$$=exp\left\{-\alpha\ln\left[z+e^v(1-z)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left[\left(\frac{z}{e^v(1-z)+z}\right)^n-z^n\right]\right\}.$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что класс распределений U, определяемый равенством (1), является собственным подклассом класса L А.Я.Хинчина, причем класс U не имеет общих элементов с классом $\mathfrak{J}$ устойчивых законов. Таким образом, $\mathfrak{J}\cup U\subset L$, но при этом $\mathfrak{J}\cup U\neq L$ [3].

Л и т е р а т у р а

1. П е т р о в В.В. Суммы независимых случайных величин. М.,

Наука, 1966.

2. М и ш е й к и с Ф.Ф. О взаимосвязи некоторых классов вероятностных распределений. - Liet. mat. rinkinys. Лит. мат. сб. 1975, 15, № 2, 61-65.

3. З а к у с и л о О.К. О классах предельных распределений в одной схеме суммирования. - Теория вероятностей и математическая статистика, 1975, вып. 12, 62-65.

4. З а к у с и л о О.К. Некоторые свойства классов предельных распределений. - Теория вероятностей и математическая статистика, 1976, вып. 15, 68-75.

5. Neuts M.F., Zacks S. On Mixtures of χ^2-and F- Distributions which Yield Distributions of the Same Family.- Ann. Inst. Statist. Math., 1967, 19, N3, 527-536.

6. Ф и х т е н г о л ь ц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Наука, 1966, т. 2.

7. Г н е д е н к о Б.В., К о в а л е н к о И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., Наука, 1966.