УДК 517.98:519.22

В.В.Камелин
(Пермский университет)

КОНУСЫ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p ($1 \leq p \leq \infty$) И МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В настоящее время для доказательства теорем в теории статистического оценивания используется теория конусов. Так в теореме о минимаксном оценивании [1] предполагается телесность конуса; теорема 6.3.1 [2] доказывается для нормальных конусов. Однако наиболее употребительные конусы в метрике пространств L_1, L_∞ этими свойствами могут не обладать.

В этой статье вводятся конусы в данных пространствах и исследуются их свойства.

Напомним определение конуса.

Пусть E - банахово пространство. Множество $K \subset E$ называется конусом, если

а) множество K замкнуто,

б) из $x, y \in K$ вытекает, что $\alpha x + \beta y \in K$ при всех $\alpha, \beta \geqslant 0$,

в) из каждой пары x и $-x$, по крайней мере, один не принадлежит K, если $x \neq \theta$, θ - нуль пространства E.

Известно [3], что если F ограниченное замкнутое множество, не содержащее нуля θ пространства E, то совокупность элементов $x = tz$, допускающих представление $x = tz$, где $t \geqslant 0$, $z \in F$, образует конус; обозначим его $K(F)$.

Сконструируем конус $K(F)$ в пространстве L_1 функций, определенных на $[-\infty, +\infty]$. В качестве F рассмотрим множество $p(x)$ - функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad , \quad p(x) \geqslant 0 .$$

Очевидно, это множество выпукло, ограничено, так как составляет часть единичной сферы в L_1 и не содержит нуля θ.

Докажем замкнутость этого множества. Пусть $p_n(x) \to p_0(x)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)dx = 1 \quad , \quad p_n(x) \geqslant 0 .$$

Из соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big|\,|p_n(x)|-|p_0(x)|\,\big|dx \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}|p_n(x)-p_0(x)|dx < \varepsilon \quad (\forall\varepsilon)$$

следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_0(x)dx = 1,$$

а условие $p_0(x)\geqslant 0$ вытекает из $p_n(x)\geqslant 0$.

Образуем конус $K(F)$. Если $p(x)$ – вероятностные распределения, то $K(F)$ содержит элементы и другой структуры, но для доказательства существования несмещенных оценок достаточно брать конусный отрезок, элементами которого являются распределения.

Конус K называется нормальным, если существует такое $\delta>0$, что $\|e_1+e_2\|\geqslant\delta$ при $e_1,e_2\in K$ и $\|e_1\|=\|e_2\|=1$.

Конус K называется воспроизводящим, если любой элемент $z\in E$ можно представить в виде $z=x-y$, где $x,y\in K$.

Построенный конус $K(F)$ нормален, что следует из общей теории конусов.

Рассмотрим E^* – пространство, сопряженное E. Пусть конус $K\subset E$, построим множество положительных на K линейных функционалов, обозначим его K^*, $K^*\subset E^*$. В силу теоремы М.Г.Крейна конус K^* воспроизводящий. Этот факт интересен тем, что общий вид функционала в $L^{\infty}_{[-\infty,\infty]}$ имеет вид $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(t)x(t)dt$, где $\alpha(t)$ – ограниченная функция и $\|f\|=\operatorname{vrai}\max\limits_{-\infty<t<+\infty}|\alpha(t)|$.

Большую роль в минимаксном оценивании, а также в доказательствах существования несмещенных оценок играют телесные конусы.

Конус K называется телесным, если он имеет внутреннюю точку. Конус неотрицательных функций в пространстве L_1 не является телесным. Но он допускает оштукатуривание, т.е. существует такой конус K_1, что каждый **ненулевой** элемент $x_0\in K$ является внутренней точкой конуса K_1 и лежит в конусе K_1 вместе с шаровой окрестностью радиуса $b\|x_0\|$, где b не зависит от элемента x_0.

Построим конус K_1, который является оштукатуриванием конуса K (конструкцию см. в работе [3]).

Рассмотрим функционал

$$f(x) = \| x \|_{L_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt \quad , \quad x(t) \geqslant 0 .$$

Обозначим через N множество точек x, где $f(x) = 1$. Множество $M = K \cap N$ – выпуклое и ограниченное, как часть шара в L_1. Пусть x_0 – фиксированный элемент из M, например, плотность равномерного закона. Обозначим через F совокупность $x \in N$, $\| x - x_0 \| \leq 2\rho$, ρ – настолько большое фиксированное число, что из

$$\| x - x_1 \| < \rho \qquad x_1 \in M \ , \ x \in M$$

вытекает, что $x_1 \in F$. Строим конус $K(F)$:

$$K_1 = K(F).$$

Конус K_1 является оштукатуриванием конуса K, ибо если $x_0 \in K$ и

$$\| h \| \leq \frac{\rho}{(2+\rho)\, \| f \|} ,$$

то $x_0 + h \in K_1$, т.е. x_0 – внутренняя точка K_1.

Литература

1. Леман Э.Л. Проверка статистических гипотез. М., Наука, 1964.

2. Партхасаратхи Т.П., Рагхаван Т.Р. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М., Мир, 1974.

3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1974.