УДК 519.271

В.М.Кондаков, П.Н.Сапожников
(Пермский университет)

ДОСТАТОЧНЫЕ СТАТИСТИКИ В ЗАДАЧАХ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть $\xi(t)$ - стационарный линейно регулярный случайный процесс с дискретным временем, имеющий спектральное представление

$$\begin{gathered} \xi(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\,\Phi(d\lambda), \\ M|\Phi(d\lambda)|^2=f(\lambda)d\lambda, \end{gathered} \qquad (1)$$

где $f(\lambda)$ - спектральная плотность, и пусть $M\xi=0$, а $M|\xi|^2=0$.

Наилучший среднеквадратичный линейный прогноз $\hat{\xi}(t+\tau)$ значения $\xi(t+\tau)$ по наблюденным значениям $\xi(\ell)$, $\ell\le t$ есть проекция вектора $\xi(t+\tau)$ на $L(t)$, где $L(t)$ - линейное замыкание пространства, натянутого на векторы $\xi(\ell)$, $\ell\le t$. В силу стационарности процесса задача об отыскании прогноза $\hat{\xi}(t+\tau)$ не зависит от t и, следовательно, можно положить $t=0$.

Выясним возможности, при которых проекция $\xi(\tau)$, $\tau>0$ на $L(0)$ имеет конечную размерность в том смысле, что прогноз $\xi(\tau)$ по промежутку $(-\infty,0]$ совпадает с прогнозом по конечному числу точек $\xi(-n+1)$, $\xi(-n+2),\dots,\xi(0)$.

Прогноз $\hat{\xi}(\tau)$, $\tau>0$, по всему прошлому до 0 включительно задается формулой [1]

$$\hat{\xi}(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\left[1-\frac{\sum_{s=0}^{\tau-1} c(s)e^{-i\lambda s}}{\varphi(\lambda)}\right]\Phi(d\lambda), \qquad (2)$$

где $\varphi(\lambda)=\Gamma(e^{-i\lambda})$ есть граничное значение максимальной аналитической в единичном круге функции, удовлетворяющей условию

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left|\Gamma(e^{-i\lambda})\right|^2 .$$

Коэффициенты $c(s)$ в формуле (2) есть коэффициенты ряда

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c(s) z^s .$$

Прогноз $\hat{\xi}(\tau)$ по точкам $\xi(-n+1), \xi(-n+2), \ldots, \xi(0)$ имеет вид

$$\hat{\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi(-k) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-i\lambda k} \Phi(d\lambda) \qquad (3)$$

в силу спектрального представления (I). Коэффициенты c_k $k = 0, 1, \ldots, n-1$ определяются из условия минимальности выражения

$$M|\xi(\tau) - \hat{\xi}(\tau)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |1 - z^{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k|^2 f(\lambda) d\lambda , \quad z = e^{-i\lambda}.$$

Приравнивая спектральные характеристики прогнозов, из формул (2) и (3) получим

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sum_{s=0}^{\tau-1} c(s) e^{-i\lambda s}}{1 - e^{-i\lambda\tau} \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-i\lambda k}} .$$

Таким образом, максимальная функция $\Gamma(z)$ имеет вид

$$\Gamma(z) = \frac{\sum_{s=0}^{\tau-1} c(s) z^s}{1 - z^{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k} , \qquad (4)$$

т.е. спектральная плотность процесса $\xi(t)$ является дробно-рациональной. Известно [I], что числитель и знаменатель максимальной функции не имеют нулей внутри единичного круга. Отсюда следует, что числитель и знаменатель функции (4) имеют внутри единичного круга разве только общие нули и $c(0) \neq 0$. Рассмотрим теперь несократимую дробь

$$\Gamma(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} , \qquad (5)$$

где $P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k$, $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_k z^k$

полиномы соответственно степени m и n ($m < n$), не имеющие нулей внутри единичного круга. Тогда процесс с максимальной функцией (5) удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} q_k \xi(t-k) = \sum_{k=0}^{m} p_k \zeta(t-k),$$

где $\zeta(t)$ – последовательность некоррелированных величин с $M\zeta(t)=0$, $M|\zeta(t)|^2=1$ ([I], с. 67).

Предположим, что функцию (5) умножением числителя и знаменателя на подходящий многочлен

$$R(z) = 1 + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j z^j$$

можно привести к виду (4). Тогда, очевидно, процесс удовлетворяет уравнению

$$\xi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi(t-\tau-k) = \sum_{s=0}^{\tau-1} c(s)\zeta(t-s),$$

откуда следует, что разность

$$\xi(t+\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi(t-k) = \sum_{s=0}^{\tau-1} c(s)\zeta(t+\tau-s)$$

не коррелирована с любым вектором $\xi(\ell)$ при $\ell \leq t$, поскольку в разложении Вольда для $\xi(\ell)$

$$\xi(\ell) = \sum_{s=0}^{\infty} c(s)\zeta(\ell-s)$$

не участвуют члены $\zeta(t+\tau-s)$, $s=1,2,\dots,\tau-1$.
Это означает, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi(t-k)$$

есть проекция $\xi(t+\tau)$ на все прошлое до момента t включительно, которая, очевидно, является конечномерной.

Итак, доказана

Т е о р е м а I. Пусть $\xi(t)$ – линейно регулярный стационарный процесс. Для того чтобы наилучший среднеквадратичный линейный прогноз на τ шагов вперед по всему прошлому до момента t включительно совпадал с прогнозом по конечному числу значений $\xi(t-n+1)$, $\xi(t-n+2)\ldots$, $\xi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы спектральная плотность процесса была дробно-рациональной, а максимальная функция допускала представление

$$\Gamma(z)=\frac{\sum\limits_{s=0}^{\tau-1} c(s)z^s}{1-z^\tau \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k z^k}.$$

В этом случае прогноз равен

$$\hat{\xi}(t+\tau)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi(t-k),$$

а погрешность

$$M\,|\xi(t+\tau)-\hat{\xi}(t+\tau)|^2=\sum_{s=0}^{\tau-1}|c(s)|^2.$$

З а м е ч а н и е. Если $c(s)=0$, $s=\tau-1$, $\tau-2$, ..., $\tau-k$, $k<\tau-1$, то прогнозы на $\tau-1$, $\tau-2$, ..., $\tau-k$ шагов совпадают с прогнозом на τ шагов и имеют ту же погрешность. Точно так же, если $c_k=0$, $k=0,1,\ldots,\ell$, $\ell<n-1$, то прогнозы на $\tau+1$, $\tau+2$, ..., $\tau+\ell$ шагов вперед совпадают с прогнозом на τ шагов, и все они осуществляются по $n-\ell$ значениям $\xi(-n+1), \xi(-n+2),\ldots,\xi(-\ell)$.

Выясним теперь, когда дробно-рациональная функция

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}=\frac{p_0+p_1 z+\ldots+p_m z^m}{1+q_1 z+\ldots+q_n z^n}, \tag{6}$$

где $m<n$ может быть представлена в виде функции (4). Попытаемся подыскать полином

$$R(z)=1+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_r z^r, \tag{7}$$

такой, чтобы при умножении числителя и знаменателя несократимой дроби (6) на этот полином она приняла вид (4). Степень r полинома (7) при прогнозировании на τ шагов вперед определяется из условия $m + r = \tau - 1$, откуда следует, что конечномерный прогноз по бесконечному прошлому, если и возможен, то только на число шагов не меньше $m + 1$.

Коэффициенты полинома $Q_n(z) \cdot R(z)$ легко определяются следующим образом. Рассмотрим матрицы Q, q, α соответственно размеров $(n+r) \times r$, $(n+r) \times 1$ и $r \times 1$:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_1 & 1 & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 \\ & \ddots & \ddots \\ q_n & & 1 \\ & q_n & q_1 \\ 0 & & \ddots \\ 0 & 0 & q_n \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты при ненулевых степенях z в полиноме $Q_n(z) \cdot R(z)$ есть соответствующие элементы столбца $Q \cdot \alpha + q$. Обозначим через $Q_{(r)}$ квадратичную матрицу, составленную из первых r строк матрицы Q, через $Q_{(m)}$ – матрицу, составленную из последующих m строк матрицы Q, через $Q_{(n-m)}$ – матрицу, составленную из последних $n-m$ строк матрицы Q. Пусть $q_{(r)}$, $q_{(m)}$, $q_{(n-m)}$ – столбцы, составленные из первых r элементов, последующих m элементов и последних $(n-m)$ элементов столбца q. Заметим, что $0 \le m \le n-1$ и при $m=0$ матрицы $Q_{(m)}$, $q_{(m)}$ исчезают.

Л е м м а. Для того чтобы после умножения числителя и знаменателя несократимой дроби

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} p_k z^k}{1 + \sum_{k=1}^{n} q_k z^k}, \qquad 0 \le m \le n-1,$$

на полином $R(z) = 1 + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j z^j$ она приняла вид

$$\frac{\sum_{s=0}^{\tau-1} c(s) z^s}{1 - z^{\tau} Q^{(1)}_{n-m-1}(z)}, \tag{8}$$

необходимо и достаточно выполнения равенства

$$Q_{(m)} \cdot Q_{(r)}^{-1} \cdot q_{(r)} = q_{(m)} . \tag{9}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Коэффициенты β_k полинома $Q_n(z) \cdot R(z)$ при степенях z от I до r определяются равенством

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = Q_{(r)} \cdot \alpha + q_{(r)} ,$$

а при степенях z от $r+1$ до $\tau - 1$ – равенством

$$\begin{bmatrix} \beta_{r+1} \\ \beta_{r+2} \\ \cdots \\ \beta_{\tau-1} \end{bmatrix} = Q_{(m)} \cdot \alpha + q_{(m)} .$$

Поскольку коэффициенты β_k , $k = 1, 2, \ldots, \tau - 1$ равны нулю, то из уравнения

$$Q_{(r)} \cdot \alpha + q_{(r)} = 0$$

определим коэффициенты полинома $R(z)$. Матрица $Q_{(r)}$ – треугольная с единицами по главной диагонали, следовательно, невырожденная, поэтому решение этого уравнения есть

$$\alpha = - Q_{(r)}^{-1} \cdot q_{(r)} .$$

Подставив это выражение в равенство

$$Q_{(m)} \cdot \alpha + q_{(m)} = 0 ,$$

получим матричное равенство (9).

Достаточность очевидна.

З а м е ч а н и я. I. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ полинома $R(z)$ равны соответствующим коэффициентам при первых r ненулевых степенях z в разложении функции $1/Q_n(z)$ в степенной ряд.

2. В случае $m = 0$ всегда существует многочлен, приводящий в результате описанной процедуры дробь $P_0/Q_n(z)$ к виду (8).

3. Полином $Q^{(1)}_{n-m-1}(z)$ в знаменателе дроби (8) имеет степень $n-m-1$.

Непосредственным следствием теоремы I и леммы является

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$ – линейно регулярный стационарный процесс. Для того, чтобы наилучший среднеквадратичный линейный прогноз на τ шагов вперед по всему прошлому до момента t включительно был конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы максимальная функция, соответствующая спектральной плотности процесса, была дробно-рациональной, а коэффициенты знаменателя этой функции (6) удовлетворяли матричному равенству (9). В этом случае прогноз осуществляется не более чем по $n-m$ последним наблюдениям и не может быть осуществлен менее чем на $m+1$ шаг вперед.

Следствие. Выполнение матричного равенства (9) эквивалентно тому, что следующая система m определителей обращается в нуль

$$\begin{vmatrix} q_{r+j} & q_{r+j-1} & \cdots & q_j \\ q_1 & 1 & & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_r & q_{r-1} & q_{r-2} & \cdots 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, m$, где элемент q_i определителя равен коэффициенту полинома $Q(z)$ при i – й степени z, если $i = 1, 2, \ldots, n$, и равен нулю, если $i > n$, причем коэффициенты полинома $R(z)$ определяются по формуле

$$\alpha_i = (-1)^i \begin{vmatrix} q_1 & 1 & & & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{i-1} & q_{i-2} & q_{i-3} & \cdots & 1 \\ q_i & q_{i-1} & q_{i-2} & \cdots & q_1 \end{vmatrix},$$

$i = 1, 2, \ldots, r.$

З а м е ч а н и е. Коэффициенты в разложении прогноза $\hat{\xi}(t+\tau)$ по векторам $\xi(t), \xi(t-1), \ldots, \xi(t-n+m-1)$ равны соответственно элементам столбца $Q_{(n-m)} \cdot Q_{(r)} \cdot q_{(r)} - q_{(n-m)}$.

Погрешность прогноза равна сумме квадратов модулей элементов столбца

$$\begin{bmatrix} p_0 & & & 0 \\ p_1 & p_0 & & \\ & p_1 & \ddots & p_0 \\ \vdots & & \ddots & p_1 \\ & & & \vdots \\ p_m & & & \\ 0 & & \ddots & p_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}.$$

Л и т е р а т у р а

I. Р о з а н о в Ю.А. Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963.